Toets Talen en Automaten

14 mei 2002, 14.00–17.00 uur, Examenhal

Schrijf met blauwe of zwarte pen; *niet* met potlood en *niet* met rode pen. Voorzie alle bladen van je naam. Nummer de bladen en vermeld op het eerste blad het totale aantal.

Werk netjes. Formuleer je antwoorden zo compleet en tevens zo beknopt mogelijk. Je mag — tenzij expliciet anders aangegeven staat — direkt een beroep doen op (1) de stellingen uit het cursusmateriaal (*mits je ze goed formuleert*), (2) indien van toepassing: een (al dan niet bewezen) resultaat uit een eerder onderdeel van de opgave in kwestie.

Bepaling eindcijfer TA. Het cijfer voor deze toets kan het eindcijfer voor Talen en Automaten positief beïnvloeden. Dit eindcijfer kan echter hooguit dan een voldoende zijn indien het tentamencijfer, t.z.t., minstens $4\frac{1}{2}$ is. Onder deze randvoorwaarde geldt dat het eindcijfer gelijk is aan het maximum van het tentamencijfer en het gewogen gemiddelde van de cijfers voor de toets en het tentamen, met relatieve gewichten 1 staat tot 3. (Het tentamen telt dus drie keer zo zwaar als de toets. Als de toets niet gemaakt is, dan is het toetscijfer gelijk aan 0.)

Opgave 1.

(i) Zij L een taal over alfabet Σ.

- (a) Wanneer heet L *recursief opsombaar*?
- (b) Wanneer heet L *recursief*?

(ii) Hoe luidt de *these van Church-Turing*?

(iii) Veronderstel: L_1 en L_2 zijn talen over alfabet Σ. Veronderstel voorts: L_1 is recursief opsombaar en L_2 is recursief. Beschouw de taal $L_1 \setminus L_2$. (Deze taal bestaat per definitie uit alle $w \in L_1$ met de eigenschap dat $w \notin L_2$.) Toon aan, dat $L_1 \setminus L_2$ recursief opsombaar is.

Je mag hierbij eventueel gebruik maken van de these van Church-Turing.

Opgave 2. Laat L de verzameling zijn van de strings $w \in \{a, b\}^*$ met de eigenschap: elke a in w wordt direkt gevolgd door (minstens) twee b's.

(i) Construeer een deterministische eindige automaat die L accepteert. (Geef deze automaat in de vorm van een transitiediagram en maak de correctheid voldoende plausibel via een *korte en heldere* uitleg van de specifieke rol van elke toestand.)

(ii) Geef ook een reguliere expressie voor L. (Eveneens met uitleg.)

Opgave 3.

(i) Geef de formulering (zonder bewijs) van het pomplemma voor reguliere talen.

(ii) Bewijs dat de volgende taal $L \subseteq \{a, b\}^*$ niet regulier is:

$$L = \{wbw \mid w \in \{a\}^*\}$$

Opgave 4. Twee automaten heten *equivalent* als ze dezelfde taal accepteren.

(i) Zij A een ϵ-NFA. Beschrijf hoe het transitiediagram van A te transformeren is in een transitiediagram van een equivalente NFA A'. (Een uitvoerig correctheidsbewijs wordt hier *niet* gevraagd.)

(ii) Zij A een NFA met n toestanden. Volgens de theorie is A te transformeren in een equivalente DFA. Geef afhankelijk van n een uitdrukking voor een mogelijk aantal toestanden van zo'n DFA. (Beargumenteer je antwoord onder verwijzing naar de algemene methode voor de omzetting van een DFA in een equivalente NFA. Houd deze verwijzing beknopt — maar wel terzake. Een correctheidsbewijs voor de methode wordt hier niet gevraagd.)

Opgave 5. Zij A een deterministische eindige automaat, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Veronderstel hierbij: elke toestand van A is bereikbaar vanuit de starttoestand q_0. Definiëer de equivalentierelatie $\sim$ op Q door:

$$q \sim q' \iff \forall w \in \Sigma^* (\hat{\delta}(q, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q', w) \in F)$$

(i) Hier wordt verwezen naar de functie $\hat{\delta}$. Recapituleer de definitie van deze functie.

(ii) Uit de theorie is bekend hoe de relatie $\sim$ te gebruiken is bij de constructie van een geminimaliseerde versie van A. (Een *geminimaliseerde versie van* A is per definitie een DFA A' voor dezelfde taal $L(A)$ met een minimaal aantal toestanden.) Het — eveneens uit de theorie bekende — algoritme voor de constructie van $\sim$ zelf maakt gebruik van het feit dat het complement $(Q \times Q) \setminus \sim$ van $\sim$ te verkrijgen is als de vereniging van bepaalde hulprelaties D_0, D_1, D_2, ... op Q. Recapituleer de definitie van deze hulprelaties.

(iii) Beschouw nu in het bijzonder het volgende geval:

$$A = (\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \{a, b\}, \delta, 0, \{0, 1\}),$$

waarbij δ gegeven wordt door:

$$\delta(0, a) = 1,\ \delta(1, a) = 0,\ \delta(2, a) = 1,\ \delta(3, a) = 0,\ \delta(4, a) = 1,\ \delta(5, a) = 2,$$

$$\delta(0, b) = 2,\ \delta(1, b) = 2,\ \delta(2, b) = 4,\ \delta(3, b) = 5,\ \delta(4, b) = 5,\ \delta(5, b) = 3.$$

Geef A grafisch weer en construeer expliciet, via tabellen voor de relevantie D_i's, een geminimaliseerde versie A' van A.

Geef A' ook grafisch weer.